Próbna matura rozszerzona (jesień 2014 r.)

Zadanie 14 — kilka innych rozwiązań

Wojciech Guzicki

Zadanie 14. Wykaż, że jeżeli α, β i γ są kątami wewnętrznymi trójkąta oraz

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\gamma,$$

to $\cos\gamma < 0$.

Rozwiązanie. Sposób I. Ponieważ α, β i γ są kątami wewnętrznymi trójkąta, więc

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha+\beta).$$

Zatem

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta) \quad \text{oraz} \quad \cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta).$$

Nasze założenie przybiera więc postać

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2(\alpha+\beta).$$

Należy zaś udowodnić, że $\cos(\alpha+\beta) > 0$. Przekształcamy w tym celu tezę w sposób równoważny (korzystając z tego, że $\sin\alpha > 0$ i $\sin\beta > 0$):

$$\begin{gathered}
\sin^2\alpha < \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2\beta,\\
\sin^2\alpha < \bigl(\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta\bigr)\cdot\bigl(\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\bigr),\\
\sin^2\alpha < 2\sin\frac{(\alpha+\beta)+\beta}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)-\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{(\alpha+\beta)-\beta}{2}\cos\frac{(\alpha+\beta)+\beta}{2},\\
\sin^2\alpha < 2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha+2\beta}{2},\\
\sin^2\alpha < 2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha+2\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},\\
\sin^2\alpha < \sin(\alpha+2\beta)\cdot\sin\alpha,\\
\sin\alpha < \sin(\alpha+2\beta),\\
0 < \sin(\alpha+2\beta) - \sin\alpha,\\
0 < 2\sin\frac{(\alpha+2\beta)-\alpha}{2}\cos\frac{(\alpha+2\beta)+\alpha}{2},\\
0 < 2\sin\beta\cos(\alpha+\beta),\\
0 < \cos(\alpha+\beta).
\end{gathered}$$

To kończy dowód.

Rozwiązanie. Sposób II. Wykorzystamy wzór na pole trójkąta. Niech P oznacza pole trójkąta i niech a, b i c będą bokami trójkąta leżącymi naprzeciw kątów α, β i γ. Mamy wówczas

$$\sin\alpha = \frac{2P}{bc}, \quad \sin\beta = \frac{2P}{ac} \quad \text{oraz} \quad \sin\gamma = \frac{2P}{ab}.$$

Dowodzona nierówność przyjmuje zatem postać

$$\frac{4P^2}{b^2c^2}+\frac{4P^2}{a^2c^2}<\frac{4P^2}{a^2b^2}.$$

Tę nierówność łatwo doprowadzamy do postaci

$$a^2+b^2<c^2.$$

Ta ostatnia nierówność jest to dokładnie warunek konieczny i wystarczający na to, by kąt γ był rozwarty, czyli by $\cos\gamma<0$.

Rozwiązanie. Sposób III. Najpierw przekształcamy dowodzoną nierówność w sposób równoważny:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha+\sin^2\beta&<\sin^2\gamma,\\
-\sin^2\alpha-\sin^2\beta&>-\sin^2\gamma,\\
1-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta&>2-\sin^2\gamma,\\
\cos^2\alpha+\cos^2\beta&>1+\cos^2\gamma.
\end{aligned}$$

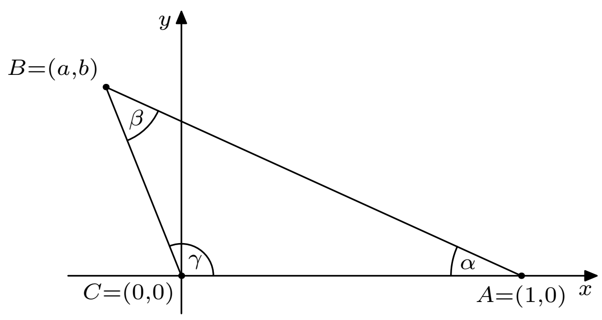
Teraz umieszczamy dany trójkąt w układzie współrzędnych. Przyjmijmy zatem, że mamy dany trójkąt ABC, w którym

$$\measuredangle BAC=\alpha,\quad \measuredangle ABC=\beta\quad\text{oraz}\quad \measuredangle ACB=\gamma.$$

Umieśćmy ten trójkąt w układzie współrzędnych tak, by

$$C=(0,0),\quad A=(1,0)\quad\text{oraz}\quad B=(a,b).$$

Możemy przy tym przyjąć, że $b>0$. Chcemy wykazać, że kąt ACB jest rozwarty, czyli że $a<0$.



Następnie mamy:

$$\vec{u}=\overrightarrow{CA}=[1,0],\quad \vec{v}=\overrightarrow{CB}=[a,b]\quad\text{oraz}\quad \vec{w}=\overrightarrow{AB}=[a-1,b].$$

Ze wzoru na cosinus kąta między wektorami otrzymujemy:

$$\cos\gamma=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \cos\alpha=\frac{(-\vec{u})\cdot\vec{w}}{|-\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}=\frac{1-a}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}$$

oraz

$$\cos\beta = \frac{(-\overrightarrow{\boldsymbol{u}}) \cdot (-\overrightarrow{\boldsymbol{w}})}{|-\overrightarrow{\boldsymbol{u}}| \cdot |-\overrightarrow{\boldsymbol{w}}|} = \frac{a(a-1)+b^2}{\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Mamy zatem udowodnić nierówność

$$\frac{(1-a)^2}{(a-1)^2+b^2} + \frac{\big(a(a-1)+b^2\big)^2}{(a^2+b^2) \cdot \big((a-1)^2+b^2\big)} > 1 + \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Po pomnożeniu obu stron nierówności przez wspólny mianownik, wykonaniu działań po obu stronach i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy nierówność

$$-2ab^2 > 0,$$

czyli $a < 0$. To kończy dowód.